

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА ВОЗМУЩЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ

© 2008 А. М. Фрумкин

доц. кафедры электротехники, электроники и автоматики, канд. тех. наук,

e-mail: frumkinam@mail.ru

Курский государственный технический университет

Статья посвящена формулировке и доказательству теоремы, обосновывающей упрощенный метод определения собственных значений матрицы, разделенной вертикально на два блока так, что элементы нижнего блока малы.

Ключевые слова: матрица, собственное значение, спектр, блок, теорема Гершгорина.

В технических исследованиях иногда возникает необходимость оценить собственные значения матрицы, вертикально разделенной на два блока так, что элементы нижнего блока малы. Естественный путь решения такой задачи - сначала определить группу собственных значений, предполагая, что элементы нижнего блока равны нулю, затем оставшиеся (малые) собственные значения определять с учетом строения нижнего блока. Предлагаемая в данной статье теорема уточняет смысл описанного подхода. Перед тем как сформулировать теорему, уточним используемые далее понятия и обозначения.

Тексты доказательств заключаются между значками ◀ ▶. Возникновение противоречия обозначается значком ■. Функции рассматриваются как отношения определенного вида [Фор 1966]. Мощность множества X обозначается как $\text{card}(X)$; набор натуральных чисел, заключенных между m и n (включая m, n), – $\underline{m, n}$. Открытый круг в множестве комплексных чисел с центром $z \in \mathbb{C}$ радиуса ρ – $Q(z, \rho)$, замкнутый – $\bar{Q}(z, \rho)$, ρ -окружение множества $X \subseteq \mathbb{C}$ – $Q(X, \rho)$, внутренность X – $\text{Int}(X)$. Для конечных множеств $Z \subseteq \mathbb{C}$ используется функция
$$d(Z) = \frac{1}{2} \min_{x, y \in Z \wedge x \neq y} |x - y|.$$

Множество корней полинома p обозначается как $Z(p) = \{z \in \mathbb{C}: p(z) = 0\}$, функция, которая каждому корню z ставит в соответствие его кратность, – как $v(p, z)$, а число корней, лежащих в множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ с учетом их кратности, – как
$$v(p, \Omega) = \sum_{z \in \Omega \cap Z(p)} v(p, z).$$
 В статье используется следующий вариант утверждения о

непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов: если хотя бы один коэффициент полинома p отличен от нуля, то для любого $\lambda \in Z(p)$ и любого $0 < \varepsilon < \min_{\mu \in Z(p) \setminus \{\lambda\}} |\mu - \lambda|$ можно найти такую окрестность Ω_p полинома p (как набора коэффициентов), что из $q \in \Omega_p$ следует $v(q, Q(\lambda, \varepsilon)) = v(p, \lambda)$. Как следствие, для любого $0 < \varepsilon < d(Z(p))$ можно найти такую окрестность Ω_p полинома p , что из $q \in \Omega_p$ следует $Z(q) \subset Q(Z(p), \varepsilon)$.

Элементы рассматриваемых матриц считаются комплексными. Для любой рассматриваемой $r \times q$ -матрицы α в качестве нормы [Ланкастер 1978] используется

величина $\|\alpha\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^q |\alpha_{ij}|$. Для описания блочного строения матриц используются

обозначения системы Matlab [Дьяконов 1999]. Спектр матрицы α обозначается $S(\alpha)$. Так же, как для полинома, $v(\alpha, \cdot)$ обозначает функцию, которая каждому $\lambda \in S(\alpha)$ ставит в соответствие его кратность.

Сформулируем теорему Гершгорина [Ланкастер 1978]. Пусть $\alpha: \underline{1, n} \times \underline{1, n} \rightarrow \mathbb{C}$ - матрица. Для $k \in \underline{1, n}$ обозначим $\rho_k = \sum_{i \in \underline{1, n} \setminus \{k\}} |\alpha_{ki}|$, $\Omega_k = \{z \in \mathbb{C}: |z - \alpha_{kk}| \leq \rho_k\}$ - радиусы и круги

Гершгорина. Для $M \subset \underline{1, n}$ обозначим $W_M = \bigcup_{k \in M} \Omega_k$. Тогда: 1) $S(\alpha) \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_k$; 2) если

$M \subset \underline{1, n}$, $N = \underline{1, n} \setminus M$ и $W_M \cap W_N = \emptyset$, то $\sum_{\lambda \in S(\alpha) \cap W_M} v(\alpha, \lambda) = \text{card}(M)$.

В рассуждениях используется как сама эта теорема, так и метод ее доказательства.

Лемма. Пусть Λ , X - $n \times n$ -матрицы, Λ - диагональна, $Y = \Lambda + X$, $\|X\| < d(S(\Lambda))$. Тогда отношение $\varphi = \{(\lambda, \mu): \lambda \in S(Y) \wedge \mu \in S(\Lambda) \wedge |\lambda - \mu| \leq \|X\|\}$ является функцией. При этом для каждого $\mu \in S(\Lambda)$ имеет место равенство $\sum_{\lambda \in \varphi^{-1}(\{\mu\})} v(Y, \lambda) = v(\Lambda, \mu)$.

♦ Пусть $\mu_1, \mu_2 \in S(\Lambda) \wedge \mu_1 \neq \mu_2 \wedge z \in Q(\mu_1, \|X\|) \cap Q(\mu_2, \|X\|)$. Тогда $|z - \mu_1| \leq \|X\| \wedge |z - \mu_2| \leq \|X\| \Rightarrow |\mu_1 - \mu_2| \leq 2\|X\| < |\mu_1 - \mu_2|$ ■, то есть круги $Q(\mu, \|X\|)$, соответствующие различным μ , не пересекаются. Рассмотрим круг Гершгорина Ω_k матрицы Y . Пусть $z \in \Omega_k$, $\mu = \Lambda_{kk}$. Тогда $|z - \mu - X_{kk}| \leq \rho_k \Rightarrow |z - \mu| - |X_{kk}| \leq |z - \mu - X_{kk}| \leq \rho_k \Rightarrow |z - \mu| - |X_{kk}| \leq \rho_k \Rightarrow |z - \mu| \leq \|X\|$. Таким образом, $\Omega_k \subseteq Q(\mu, \|X\|)$. Если $\lambda \in S(Y)$, то по теореме Гершгорина найдется $k \in \underline{1, n}$: $\lambda \in \Omega_k \Rightarrow \lambda \in Q(\Lambda_{kk}, \|X\|) \Rightarrow \exists \mu \in S(\Lambda): |\lambda - \mu| \leq \|X\|$. Так как круги $Q(\mu, \|X\|)$, соответствующие различным μ , не пересекаются, то μ единственно и $\varphi: S(Y) \rightarrow S(\Lambda)$. Далее для $\mu \in S(\Lambda)$ определим $M = \{k \in \underline{1, n}: \Lambda_{kk} = \mu\}$. Тогда $v(\Lambda, \mu) = \text{card}(M)$. Пусть $\lambda \in S(Y) \cap W_M$. Тогда для некоторого $k \in M$ $\lambda \in \Omega_k \Rightarrow \lambda \in Q(\mu, \|X\|) \Rightarrow \varphi(\lambda) = \mu$. Обратно, пусть $\varphi(\lambda) = \mu \Rightarrow \lambda \in Q(\mu, \|X\|)$. Тогда по теореме Гершгорина найдется $k \in \underline{1, n}$: $\lambda \in \Omega_k$. Неравенство $\Lambda_{kk} \neq \mu$ невозможно, так как в этом случае $\lambda \in Q(\mu, \|X\|) \cap Q(\Lambda_{kk}, \|X\|) \neq \emptyset$ ■. Поэтому $\Lambda_{kk} = \mu \Rightarrow k \in M$ $\lambda \in W_M$. Таким образом, $\varphi^{-1}(\{\mu\}) = S(Y) \cap W_M$ и равенство $\sum_{\lambda \in \varphi^{-1}(\{\mu\})} v(Y, \lambda) = v(\Lambda, \mu)$

непосредственно следует из второго заключения теоремы Гершгорина. ▸

Сформулируем основное исследуемое утверждение. В нем рассматривается $(m+n) \times (m+n)$ -матрица γ , разделенная вертикально на два блока высоты m и n соответственно.

Теорема. Пусть $\alpha_H: \underline{1, m} \times \underline{1, m} \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_L: \underline{1, m} \times \underline{1, n} \rightarrow \mathbb{C}$, $\beta_H: \underline{1, n} \times \underline{1, m} \rightarrow \mathbb{C}$, $\beta_L: \underline{1, n} \times \underline{1, n} \rightarrow \mathbb{C}$, - матрицы, причем α_H обратима и не имеет кратных собственных значений. Буквы «H» (high) и «L» (low) подчеркивают, что определяемый объект связан с верхними (нижними) частями рассматриваемых далее векторов-столбцов. Пусть $\alpha = [\alpha_H \ \alpha_L]$, $\beta = [\beta_H$

$\beta_L]$, $\gamma = \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta \beta \end{bmatrix} = [\alpha; \delta \beta]$ - матрица-функция числа δ . Тогда спектр γ $S(\gamma)$ обладает следующими свойствами.

1. Найдутся такие $\rho_1(\alpha, \beta) > 0$ и $\delta_1(\alpha, \beta) > 0$, что при $|\delta| < \delta_1(\alpha, \beta)$ отношение $\varphi_1(\delta) = \{(\lambda, \mu): \lambda \in S(\gamma) \wedge \mu \in S(\alpha_H) \cup \{0\} \wedge |\lambda - \mu| \leq \rho_1(\alpha, \beta)|\delta|\}$ отображает $S(\gamma)$ на

$S(\alpha_H) \cup \{0\}$, причем каждое $\mu \in S(\alpha_H)$ имеет единственный прообраз (то есть $[\varphi_1(\delta)]^{-1}: S(\alpha_H) \rightarrow S(\gamma)$).

2. Если матрица $(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L)$ обратима и не имеет кратных собственных значений, найдутся такие $\rho_2(\alpha, \beta) > 0$ и $\delta_2(\alpha, \beta) > 0$ ($\delta_2(\alpha, \beta) \leq \delta_1(\alpha, \beta)$), что при $0 < |\delta| < \delta_2(\alpha, \beta)$ отношение $\varphi_2(\delta) = \{(\lambda, \mu): \lambda \in [\varphi_1(\delta)]^{-1}(\{0\}) \wedge \mu \in S(\delta(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L)) \wedge |\lambda - \mu|/|\mu| \leq \rho_2(\alpha, \beta)|\delta|\}$ взаимно-однозначно отображает $[\varphi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$ на $S(\delta(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L))$.

В рассуждениях будем использовать следующие обозначения. Символ $0(p, q)$ обозначает $p \times q$ -матрицу, содержащую одни нули, 0_p – нулевой вектор-столбец пространства C^p , E_p – диагональную матрицу тождественного оператора размера $p \times p$. Верхний и нижний компоненты вектора $x \in C^{m+n}$ длины m и n соответственно будем обозначать как $x_H \in C^m$ и $x_L \in C^n$.

Рассмотрим матрицы $A = \begin{bmatrix} \alpha & \\ 0(n, m+n) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0(m, m+n) & \\ & \delta\beta \end{bmatrix}$. Матрица A вырождена,

то есть $0 \in S(A)$. Пусть $\lambda \in S(A) \setminus \{0\}$, x – принадлежащий λ собственный вектор. Тогда $Ax = [\alpha_H x_H + \alpha_L x_L; 0_n] = \lambda[x_H; x_L] \Rightarrow x_L = 0_n \Rightarrow \alpha_H x_H = \lambda x_H$, то есть $\lambda \in S(\alpha_H)$. Обратно, из $\alpha_H x_H = \lambda x_H$ следует $A[x_H; 0_n] = \lambda[x_H; 0_n] \Rightarrow \lambda \in S(A)$. Итак $S(A) = S(\alpha_H) \cup \{0\}$.

Так как α_H не имеет кратных собственных значений, найдется такая невырожденная матрица π , что $\pi^{-1} \alpha_H \pi$ – диагональна. Тогда матрицы $P = \begin{bmatrix} \pi & -\alpha_H^{-1} \alpha_L \\ 0(n, m) & E_n \end{bmatrix}$,

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \pi^{-1} & \pi^{-1} \alpha_H^{-1} \alpha_L \\ 0(n, m) & E_n \end{bmatrix}$ приводят A к диагональному виду $\Lambda_0 = P^{-1} A P$ и (в силу

$\gamma = A + B$) имеем: $P^{-1} \gamma P = \Lambda_0 + \delta D$, где

$$D = \begin{bmatrix} \pi^{-1} \alpha_H^{-1} \alpha_L \beta_H \pi & \pi^{-1} \alpha_H^{-1} \alpha_L (\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L) \\ \beta_H \pi & \beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L \end{bmatrix}.$$

Положим $\rho_1(\alpha, \beta) = \|D\|$, $\delta_1(\alpha, \beta) = d(S(\Lambda_0))/\|D\| = d(S(\alpha_H) \cup \{0\})/\|D\|$. Первое заключение теоремы следует из леммы.

Для доказательства второго заключения сначала докажем разложение C^{m+n} в прямую сумму образа и ядра матрицы A . Если $y \in \text{Im}(A)$, то $y_L = 0$. Обратно, если $y \in C^{m+n} \wedge y_L = 0$, то $y = A[\alpha_H^{-1} y_H; 0_n]$ и $y \in \text{Im}(A)$, то есть $\text{Im}(A) = \{y \in C^{m+n}: y_L = 0\}$ и $\dim(\text{Im}(A)) = m$. $\text{Ker}(A) = \{x \in C^{m+n}: \alpha x = 0_m\}$. Пусть $e_1 \dots e_n$ – базис C^n . Если $y = [y_H; y_L] \in \text{Ker}(A)$, то $y_H = -\alpha_H^{-1} \alpha_L y_L$. Если представить y_L как линейную комбинацию e_k , то y_H представляется как линейная комбинация $-\alpha_H^{-1} \alpha_L e_k$ с теми же коэффициентами, то есть y представляется линейной комбинацией векторов $f_k = [-\alpha_H^{-1} \alpha_L e_k; e_k]$ ($k \in \underline{1, n}$). С другой стороны, вместе с e_k векторы f_k линейно независимы. Поэтому $\dim(\text{Ker}(A)) = n$, то есть $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = m + n$.

Пусть $y \in \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$, то есть $Ay = 0 \wedge \exists x \in C^{m+n}: y = Ax$. Тогда $Ax = [\alpha x; 0_n] \Rightarrow Ay = [\alpha_H \alpha x; 0_n]$. Так как $Ay = 0$ и α_H обратима, то $\alpha x = 0 \Rightarrow y = 0$, то есть $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$. Следовательно, $C^{m+n} = \text{Ker}(A) \dot{+} \text{Im}(A)$.

Пусть $\lambda \in S(\gamma)$. Разложим соответствующий собственный вектор $y \neq 0_{m+n}$ на компоненты $x \in \text{Ker}(A)$ и $z = [h; 0_n] \in \text{Im}(A)$. Тогда из равенства $\gamma y = \lambda y$ с учетом $\gamma = A + B$, $Ax = 0$, $x = [x_L; x_H]$, $x_H = -\alpha_H^{-1} \alpha_L x_L$ следуют два равенства:

$$(\alpha_H - \lambda E_m)h = -\lambda \alpha_H^{-1} \alpha_L x_L, \quad \text{и} \quad \delta(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L)x_L + \delta \beta_H h = \lambda x_L \quad (x_L \neq 0_n). \quad (1)$$

Выберем δ_3 из условий $\delta_3 \leq \delta_1(\alpha, \beta)$ и $\rho_1(\alpha, \beta) \delta_3 \|\alpha_H^{-1}\| \leq 1$, то есть $\delta_3 \leq \min\{\delta_1(\alpha, \beta), 1/(\rho_1(\alpha, \beta) \|\alpha_H^{-1}\|)\}$. Пусть $0 < |\delta| < \delta_3$ и $\lambda \in [\varphi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$. Тогда $|\lambda| \leq \rho_1(\alpha, \beta) |\delta|$ и потому $\|\lambda \alpha_H^{-1}\| \leq \rho_1(\alpha, \beta) |\delta| \|\alpha_H^{-1}\| < 1$. Следовательно, $E_m - \lambda \alpha_H^{-1}$ обратима (если для матрицы X $\|X\| < 1$, то $(E + X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^k$ и $\|(E - X)^{-1}\| < 1/(1 - \|X\|)$ [Ланкастер 1978]),

первое из уравнений (1) разрешается относительно h : $h = -\lambda(E_m - \lambda \alpha_H^{-1})^{-1} \alpha_H^{-2} \alpha_L x_L$ и второе уравнение принимает вид:

$$\delta(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L) x_L = \lambda [E_n + \delta \beta_H (E_m - \lambda \alpha_H^{-1})^{-1} \alpha_H^{-2} \alpha_L] x_L \text{ или}$$

$$[(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L) - (\lambda/\delta)(E_n + \delta \beta_H (E_m - \delta(\lambda/\delta) \alpha_H^{-1})^{-1} \alpha_H^{-2} \alpha_L)] x_L = 0_n.$$

В силу $x_L \neq 0_n$ число $\lambda' = \lambda/\delta$ является решением уравнения:

$$\theta(\lambda', \delta) = \det[(\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L) - \lambda'(E_n + \delta \beta_H (E_m - \delta \lambda' \alpha_H^{-1})^{-1} \alpha_H^{-2} \alpha_L)] = 0. \quad (2)$$

Приведем $U = (\beta_L - \beta_H \alpha_H^{-1} \alpha_L)$ к диагональному виду матрицей P : $P^{-1}UP = \Lambda$. Обозначим $V(\lambda', \delta) = P^{-1} \beta_H (E_m - \delta \lambda' \alpha_H^{-1})^{-1} \alpha_H^{-2} \alpha_L P$. Тогда (2) принимает вид:

$$\theta(\lambda', \delta) = \det[\Lambda - \lambda'(E_n + \delta V(\lambda', \delta))] = 0. \quad (3)$$

Обратно, если при $0 < |\delta| < \delta_3$ число λ' является решением (3) (то есть $|\delta \lambda'| \|\alpha_H^{-1}\| < 1$), то $\delta \lambda' \in S(\gamma)$, а если $|\delta \lambda'| \leq d(S(A))$, то $\delta \lambda' \in [\varphi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$. Поэтому проанализируем решения (3) (далее знак штриха при λ опущен). Обозначим

$$\Theta(\delta) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\delta \lambda| \|\alpha_H^{-1}\| < 1 \wedge \theta(\lambda, \delta) = 0\}.$$

Пусть $\lambda \in \Theta(\delta)$. Тогда найдется $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$: $[\Lambda - \lambda(E_n + \delta V(\lambda, \delta))]x = 0_n$. Выберем номер $p \in \underline{1, n}$: $\forall k \in \underline{1, n} \quad |x_p| \geq |x_k|$. Так как $x \neq 0$, $|x_p| > 0$. Запишем p -ую строку равенства $[\Lambda - \lambda(E_n + \delta V(\lambda, \delta))]x = 0_n$ (μ_p – элемент главной диагонали Λ):

$$\mu_p x_p - \lambda x_p - \sum_{k=1}^n \lambda \delta V_{pk} x_k = 0, \text{ откуда}$$

$$|\mu_p - \lambda| |x_p| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda \delta| |V_{pk}| |x_k| \leq |\lambda \delta| |x_p| \sum_{k=1}^n |V_{pk}| \leq |\lambda \delta| \cdot \|V\| \cdot |x_p|.$$

Сокращая на $|x_p|$ и учитывая мультипликативность нормы, получаем:

$$|\mu_p - \lambda| \leq |\delta \lambda| \|V\| \leq |\delta \lambda| \|P^{-1}\| \|\beta_H\| \|\alpha_H^{-2}\| \|\alpha_L\| \|P\| / (1 - |\delta \lambda| \|\alpha_H^{-1}\|)$$

Обозначим $\rho_{\max} = \max_{\mu \in S(\Lambda)} |\mu|$, $\rho_{\min} = \min_{\mu \in S(\Lambda)} |\mu|$, $a_0 = \|P^{-1}\| \|\beta_H\| \|\alpha_H^{-2}\| \|\alpha_L\| \|P\|$,

$b_0 = \|\alpha_H^{-1}\| \cdot \rho_{\max}$, $a = |\delta| a_0$, $b = |\delta| b_0$ и получим неравенство для $\xi = |\lambda/\mu_p|$:

$$\left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \leq \left| 1 - \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \leq \left| \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \frac{a}{1 - \left| \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \cdot |\delta \mu_p| \cdot \|\alpha_H^{-1}\|} \leq \left| \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \frac{a}{1 - \left| \frac{\lambda}{\mu_p} \right| \cdot b} \quad (4)$$

Из него следует, что либо $\xi \geq 1 \wedge \xi - 1 \leq a\xi/(1 - b\xi)$, либо $\xi < 1 \wedge 1 - \xi \leq a\xi/(1 - b\xi)$.

Пусть $|\delta| < \delta_4 = \frac{1}{(\sqrt{a_0} + \sqrt{b_0})^2}$. Тогда $a + b < 1$ и $1/b > 1$. Первая группа неравенств

приводится к виду: $\xi \geq 1 \wedge \xi b < 1 \wedge b\xi^2 - (1 + b - a)\xi + 1 \geq 0$. Выбор $|\delta| < \delta_4$ обеспечивает вещественность корней трехчлена, определяющего последнее из неравенств:

$$\eta_0 = \frac{1}{2b} \left(1 + b - a - \sqrt{(1 + b - a)^2 - 4b} \right),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2b} \left(1 + b - a + \sqrt{(1 + b - a)^2 - 4b} \right) < \frac{1}{2b} \left(1 + b + \sqrt{(1 + b)^2 - 4b} \right) = \frac{1}{b}.$$

С учетом равенства $(1+b-a)^2-4b=(1-b-a)^2-4ab$

$$\eta_0 - 1 = \frac{1}{2b} (1 - b - a - \sqrt{(1 + b - a)^2 - 4b}) = \frac{2a}{1 - b - a + \sqrt{(1 - b - a)^2 - 4ab}} > 0. \quad (5)$$

Таким образом, есть два промежутка возможных значений ξ : $[1, \eta_0]$ и $[\eta_1, 1/b)$. Вторая группа неравенств приводится к виду: $\xi < 1 \wedge \xi b < 1 \wedge b\xi^2 - (1+b+a)\xi + 1 \leq 0$. Корни трехчлена, определяющего последнее из неравенств:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2b} \left(1 + b + a - \sqrt{(1 + b + a)^2 - 4b} \right) = \frac{2}{1 + b + a + \sqrt{(1 + b + a)^2 - 4b}}$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2b} \left(1 + b + a + \sqrt{(1 + b + a)^2 - 4b} \right)$$

Так как $1 + b + a + \sqrt{(1 + b + a)^2 - 4b} = 1 + b + a + \sqrt{(1 - b + a)^2 + 4ab} > 2(1 + a) > 2$, то

$\vartheta_0 < 1 \wedge \vartheta_1 > 1/b$, и имеется один промежуток возможных значений ξ : $[\vartheta_0, 1)$. В итоге либо $|\lambda/\mu_p| \in [\vartheta_0, \eta_0]$, либо $|\lambda/\mu_p| \in [\eta_1, 1/b)$. С учетом $|\lambda/\mu_p| < \eta_0$ из (4) следует, что

$|\mu_p - \lambda| \leq |\mu_p| \frac{\eta_0 p}{1 - \eta_0 q}$. В итоге, при $|\delta| < \delta_4$ для любого $\lambda \in \Theta(\delta)$ либо найдется $\mu \in S(\Lambda)$:

$|\mu - \lambda| \leq |\mu| \frac{\eta_0 p}{1 - \eta_0 q}$, либо найдется $\mu \in S(\Lambda)$: $|\lambda| > |\mu| \eta_1$. Функция

$\eta(\delta) = \frac{\eta_0 p}{1 - \eta_0 q} = \eta_0(\delta) - 1$, согласно выражению (5), монотонно возрастает с $|\delta|$, причем

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(\delta) = 0$. Функция $\eta_1(\delta) = 1 + \frac{1}{2b} \left(1 - b - a + \sqrt{(1 - b - a)^2 - 4ab} \right)$ монотонно

убывает с $|\delta|$, причем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta_1(\delta) = +\infty$. Найдем δ_5 из уравнения $\rho_{\max} \eta(\delta_5) = d(S(\Lambda))$ и δ_6 из

уравнения $\rho_{\min} \eta_1(\delta_6) = \rho_{\max} + d(S(\Lambda))$. Примем $\rho_2 = \eta(\delta_5)/\delta_5$. Пусть $|\delta| < \delta_7 = \min\{\delta_4, \delta_5, \delta_6\}$.

Покажем, что тогда отношение $\Phi(\delta) = \{(\mu, \lambda): \mu \in S(\Lambda) \wedge \lambda \in \Theta(\delta) \wedge |\lambda - \mu| \leq |\mu| \rho_2 |\delta|\}$ инъективно отображает $S(\Lambda)$ в $\Theta(\delta)$.

Рассмотрим матрицу: $V(\lambda, \delta) = P^{-1} \beta_H (\alpha_H - \delta \lambda E_m)^{-1} \alpha_H^{-1} \alpha_L P$. Элемент матрицы $(\alpha_H - \delta \lambda E_m)^{-1}$ имеет вид: $p(\delta, \lambda) / \det(\alpha_H - \delta \lambda E_m)$, где $p(\delta, \lambda)$ - некоторый полином от λ степени не выше $m-1$. Следовательно, элементы $V' = \Lambda - \lambda \delta V(\lambda, \delta)$ - дробно-линейные функции λ , числители которых - полиномы от λ степени не выше m , а знаменатели одинаковы и равны $\det(\alpha_H - \delta \lambda E_m)$. Разложим $\theta(\lambda, \delta) = \det[V' - \lambda E_n]$ по степеням λ , рассматривая элементы V' как целое: $\theta(\lambda, \delta) = (-1)^n \lambda^n + v_1 \lambda^{n-1} + v_2 \lambda^{n-2} + v_n$. Коэффициент v_k - это сумма, каждое слагаемое которой является произведением k элементов из V' , то есть v_k - дробно-рациональная функция, числитель которой имеет степень не более $k'm$, а знаменатель (то есть $[\det(\alpha_H - \delta \lambda E_m)]^k$) имеет степень $k'm$. После приведения к общему знаменателю (им является $[\det(\alpha_H - \delta \lambda E_m)]^n$) числители выражений $v_k \lambda^{n-k}$ становятся полиномами степени не выше $mn + n - k = (m+1)n - k$, а нулевой член $(-1)^n \lambda^n$ становится дробью, числитель которой является полиномом степени $(m+1)n$. Таким образом,

$\theta(\lambda, \delta) = p(\delta, \lambda) / [\det(\alpha_H - \delta \lambda E_m)]^n$, где $p(\delta, \lambda)$ - полином от λ степени $(m+1)n$, первый коэффициент которого есть $\delta^{mn}(-1)^{(m+1)n}$. Если $\delta \neq 0$, то первый коэффициент p отличен от нуля, если $\delta = 0$, то отличен от нуля его свободный член, равный $\det(\Lambda)$. Таким образом, при всех δ для $p(\delta, \lambda)$ верно сформулированное в начале статьи утверждение о непрерывной зависимости корней от коэффициентов, а значит от δ .

Рассмотрим $\mu \in S(\Lambda)$. Обозначим $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}: |z - \mu| \leq |\mu| \rho_2 \delta_7\}$, $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}: |z - \mu| \leq |\mu| \rho_2 |\delta|\}$. При $0 < |\delta| < \delta_7$ имеет место равенство

$$\Theta(\delta) \cap \Omega_\delta = Z(p(\delta, \cdot)) \cap \Omega_0.$$

Ясно, что $\Theta(\delta) \cap \Omega_\delta \subseteq Z(p(\delta, \cdot)) \cap \Omega_0$ в силу $\Theta(\delta) \subseteq Z(p(\delta, \cdot)) \wedge \Omega_\delta \subseteq \Omega_0$. Для произвольного $z \in \Omega_0$ при $|\delta| < \delta_7$ оценим величину $1 - |z\delta| \|\alpha_H^{-1}\|$, считая, что $a = a(\delta_5)$, $b = b(\delta_5)$. Имеем: $|\mu| + \rho_2 |\mu| |\delta_7| \leq |\mu| (1 + \eta(\delta_5)) \leq |\mu| \eta_0(\delta_5) \leq \rho_{\max} \eta_0(\delta_5)$. Поэтому

$$1 - |z\delta| \|\alpha_H^{-1}\| \geq 1 - \rho_{\max} |\delta| \|\alpha_H^{-1}\| \eta_0(\delta_5) = 1 - b \eta_0 = \frac{1}{2} \left(1 - b + a + \sqrt{(1 + b - a)^2 - 4b} \right) > 0.$$

Пусть теперь $\lambda \in Z(p(\delta, \cdot)) \cap \Omega_0$. Тогда $\lambda \in \Omega_0$, то есть $|\lambda\delta| \|\alpha_H^{-1}\| < 1 \Rightarrow \lambda \in \Theta(\delta)$. Пусть $\lambda \notin \Omega_\delta$. Тогда либо найдется $\mu' \in S(\Lambda) \setminus \{\mu\}$: $\lambda \in Q(\mu', |\mu'| \rho_2 |\delta|)$, либо найдется $\mu' \in S(\Lambda)$: $|\lambda| > |\mu'| \eta_1(\delta)$. Пусть $\lambda \in Q(\mu', |\mu'| \rho_2 |\delta|)$. Тогда по выбору δ_7 $\lambda \in Q(\mu', d(S(\Lambda)))$, то есть $Q(\mu', d(S(\Lambda))) \cap \Omega_0 \neq \emptyset \Rightarrow Q(\mu, d(S(\Lambda))) \cap Q(\mu', d(S(\Lambda))) \neq \emptyset$ ■.

Пусть $|\lambda| > \eta_1(\delta) |\mu'| > \eta_1(\delta_6) |\mu'| > \rho_{\min} \eta_1(\delta_6) > \rho_{\max} + d(S(\Lambda))$.

Тогда $|\lambda| > |\mu| + d(S(\Lambda)) \Rightarrow |\lambda - \mu| \geq |\lambda| - |\mu| > d(S(\Lambda))$, то есть $\lambda \notin \Omega_0 \subset Q(\mu, d(S(\Lambda)))$ ■. Следовательно, $\lambda \in \Omega_\delta \Rightarrow \lambda \in \Theta(\delta) \cap \Omega_\delta$. Итак $\Theta(\delta) \cap \Omega_\delta = Z(p(\delta, \cdot)) \cap \Omega_0$. ▸

Докажем, что $\forall 0 < |\delta| < \delta_7$ $v(p(\delta, \cdot), \Omega_0) = 1$. При $\delta = 0$ $p(0, \lambda) = \det(\Lambda - \lambda E_n)$ и найдется единственное и не кратное $\lambda \in Z(p(0, \cdot)) \cap \Omega_0$, а именно $\lambda = \mu$, поэтому в некоторой окрестности нуля $v(p(\delta, \cdot), \Omega_0) = 1$. Пусть $0 < |\delta| < \delta_7$ и $v(p(\delta, \cdot), \Omega_0) \neq 1$. Обозначим $t = \inf\{\tau \in [0, 1]: v(p(\tau\delta, \cdot), \Omega_0) \neq 1\}$. Возможны следующие ситуации. 1) В Ω_0 нет корней $p(\tau\delta, \cdot)$. Тогда все корни лежат строго вне Ω_0 и найдется такое $0 \leq \tau < t$, что все корни $p(\tau\delta, \cdot)$ останутся вне Ω_0 ■. 2) В Ω_0 есть по крайней мере два различных корня λ_1 и λ_2 $p(\tau\delta, \cdot)$. Тогда $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega_{t\delta} \subset \text{Int}(\Omega_0)$ и найдется такое $0 \leq \tau < t$, что в $\text{Int}(\Omega_0)$ окажутся различные корни $p(\tau\delta, \cdot)$ ■. 3) В Ω_0 единственный корень λ $p(\tau\delta, \cdot)$ кратности $k > 1$. Тогда $\lambda \in \Omega_{t\delta} \subset \text{Int}(\Omega_0)$ и найдется такое $0 \leq \tau < t$, что в $\text{Int}(\Omega_0)$ окажется либо более одного корня $p(\tau\delta, \cdot)$, либо корень кратности более 1. ■. ▸

Следовательно, для любого $\mu \in S(\Lambda)$ найдется единственное $\lambda \in \Theta(\delta) \cap Q(\mu, |\mu| \rho_2 |\delta|)$, то есть ϕ - функция. Если для разных $\mu_1, \mu_2 \in S(\Lambda)$ λ одно и то же, то окажется, что $Q(\mu_1, |\mu_1| \rho_2 |\delta|) \cap Q(\mu_2, |\mu_2| \rho_2 |\delta|) \neq \emptyset$ ■, то есть ϕ инъективна. ▸

Определим теперь δ_8 из уравнения $\rho_{\min} \eta_1(\delta_8) = \rho_1(\alpha, \beta)$, δ_9 из уравнения $\rho_{\max} (1 + \eta(\delta_9)) \delta_9 = d(S(A))$ и $\delta_2 = \min\{\delta_7, \delta_8, \delta_9\}$. Пусть $0 < |\delta| < \delta_2$ и $\lambda \in [\phi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$. Тогда, в силу $|\delta| < \delta_3$, $\lambda' = \lambda / \delta \in \Theta(\delta)$ и $|\lambda'| < \rho_1(\alpha, \beta)$. Так как $|\delta| < \delta_4$, для λ' либо найдется $\mu \in S(\Lambda)$: $|\mu - \lambda'| \leq |\mu| \eta(\delta)$, либо найдется $\mu \in S(\Lambda)$: $|\lambda'| \geq |\mu| \eta_1(\delta)$. В последнем случае $\rho_1(\alpha, \beta) > |\mu| \eta_1(\delta) > \rho_{\min} \eta_1(\delta)$, но, в силу $|\delta| < \delta_8$, $\rho_{\min} \eta_1(\delta) > \rho_1(\alpha, \beta)$ ■. Поэтому $|\mu - \lambda'| < |\mu| \eta(\delta)$, то есть $\lambda' = \phi(\mu)$, причем $|\mu\delta - \lambda| \leq |\mu\delta| \eta(\delta) \leq |\mu\delta| \rho_2 |\delta|$ и, в силу инъективности ϕ , μ единственно. Обратно, если $\lambda' = \phi(\mu)$, то $\lambda = \delta \lambda' \in S(\gamma)$ и $|\mu\delta - \lambda| \leq |\mu\delta| \rho_2 |\delta|$ и $|\lambda| < |\mu| (1 + \eta(\delta)) |\delta| \leq \rho_{\max} (1 + \eta(\delta)) |\delta| < d(S(A))$ и, в силу $|\delta| < \delta_1$, $|\lambda| < \rho_1(\alpha, \beta) |\delta|$, то есть $\lambda \in [\phi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$. Другого $\lambda_1 \in [\phi_1(\delta)]^{-1}(\{0\})$, обладающего свойством $|\mu\delta - \lambda_1| \leq |\mu\delta| \eta(\delta)$, быть не может, так как из $|\delta| < \delta_3$ следует, что $\lambda_1 / \delta \in \Theta(\delta) \Rightarrow \lambda_1 = \phi(\mu)$. Итак, мы доказали, что ϕ_2 из второго заключения теоремы является биекцией. ▸

Библиографический список

1. Фор, Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. - М. : Мир, 1966. – 272 с.
2. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
3. Дьяконов, В. П. MATLAB 5.0/5.3 Система символьной математики / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. - М. : Нолидж, 1999. – 640 с.