УДК 621

ВЫРАВНИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ НА ЭТАПЕ ИХ ОПИСАНИЯ С ПОМОЩЬЮ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ РАЗМЕРОВ

© 2016 А. И. Барботько[1], А. А. Барботько[2], К. В. Апатьева[3]

[1] *канд. техн. наук, профессор ВАК,*
профессор кафедры безопасности жизнедеятельности
e-mail Anivanbar@yandex.ru

Курский государственный университет

[2] *канд. мед. наук, ассистент кафедры гистологии*

Курский государственный медицинский институт

[3] *магистрант направления 050100.68*
e-mail: kristina.boyarshina@mail.ru

Курский государственный университет

Данная статья посвящена проблемам оценки влияния константы σ степенной функции нормального распределения на точность аппроксимации массива экспериментальных данных распределения отклонения размеров. Раскрывается уточненный метод определения величины константы.

Ключевые слова: эмпирическая функция нормального распределения; константы функции; среднеарифметическое выборки отклонений, среднеквадратическая ошибка; базовые точки на колоколообразной кривой распределения.

Задача определения точности оценки приближения экспериментального распределения отклонений размеров к нормальному распределению отклонений (НРО) возникает при преобразовании массивов экспериментального распределения отклонений размеров к параметрам нормального распределения. Алгоритм этих операций включает ряд этапов. Сначала проводится анализ массива отклонений размеров при измерении контролируемого параметра. Построение экспериментальных кривых распределения, следующий этап исследования, базируется на учете общего экспериментального массива отклонений размеров и определении частоты отклонений в каждом из интервалов массива. Дальнейшая работа направлена на сравнение экспериментальных данных, их графических представлений с графиками стандартного НРО.

Структурные особенности математической модели стандартного нормального распределения отклонений таковы, что при графическом изображении её график имеет колоколообразную форму.

В технологии сравнения этих двух видов кривых: экспериментальных и формульных сначала необходимо доказать, что экспериментальная кривая подобна формульной кривой НРО. Для доказательства используют ряд математических методов (например, метод Колмогорова). Однако несхожесть этих графиков зачастую можно установить визуально. Например, наличие в средине экспериментального графика нулевых частот говорит о том, что аппроксимировать выполненное исследование с помощью модели НРО не представляется возможным. Зачастую частоты отклонений почти равномерно распределяются по интервалам, увеличиваются или уменьшаются от одного крайнего интервала к другому, вместо того чтобы в приемлемом варианте убывать от срединного интервала к крайним

Для примера проследим алгоритм оценки массива экспериментальных данных.

Этап 1. Измерением диаметров роликов, например, установлены следующие фактические размеры:

17, 89	17, 92	17, 93	17, 94	17, 94
17, 95	17, 95	17. 96	17, 96	17, 96
17, 97	17, 97	17, 97	17, 98	17, 98
17, 98	17, 99	17, 99	18, 00	18, 00
18, 01	18, 02	18, 02	18, 04	18, 05

Из приведенного ряда чисел следует, что максимальный размер ролика d_{max} = 18,05 мм, а минимальный d_{min} = 17,89 мм. Тогда поле рассеяния в выборке отклонений размеров

$$\Delta_P^{выб} = 18{,}05 - 17{,}89 = 0{,}16 \text{ мм.}$$

Этап 2. Разбиваем приведенный ряд чисел на группы через определенный интервал и устанавливаем абсолютную частоту повторяемости размеров в каждом интервале (m_i), строим таблицу 1.

Полагая, что измерение роликов производилось микрометром с точностью измерения 0, 01 мм, принимаем интервал С = 0, 02 мм, то естьтого же порядка, что и точность измерения. Тогда количество групп (интервалов) равно

$$K = \frac{\Delta_P^{выб}}{c} = \frac{0{,}16}{0{,}02} = 8 \text{ групп.}$$

Интервалы размеров, средние размеры в интервалах (x_i) и абсолютную частоту их повторяемости заносим в 1-ю, 2-ю и 3-ю графы табл. 1.

Таблица 1

Интервалы размеров	Средина интервала x_i	m_i	$x_i m_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2 \cdot 10^4$	$(x_i - \overline{X})^2 m_i \cdot 10^4$
1	2	3	4	5	6	7
17, 89–17, 91	17, 90	1	17, 90			
17, 91–17, 98	17, 92	1	17, 92	–0, 06	86	36
17, 93–17, 95	17, 94	3	53, 82	–0, 04	16	48
17, 55–17, 97	17, 96	5	89, 80	–0, 02		20
17, 97–17, 99	17. 98	6	107, 88	0	0	0
17, 99–18, 01	18, 00	4	72, 00	+0, 02	4	16
18, 01–18, 03	18, 02	3	54, 06	+0, 04	16	48
18, 03–18, 05	18, 04	2	36, 08	+0, 06	36	72
		$\sum m_i = 25$	$\sum_1^8 x_i m_i =$ = 449,46			$\sum_1^8 (x_i - \bar{x})^2 m_i \cdot 10^4 =$ = 304

Примечание: при заполнении граф 6 и 7 результаты вычислений умножим на 10^4 с целью избавиться от дробных значений и заменить их целыми числами, удобными для дальнейших вычислений. Это следует учесть при вычислении величины (σ), разделив суммарный результат графы 7 на 10^4 (см. далее пример).

Этап 3. По полученным данным (графы 1, 2, 3 таблицы 1) строим экспериментальную кривую зависимости изменения частот попадания отклонений размеров в принятое количество интервалов (см. рис. 1).

Этап 4. Определяем параметры эмпирической кривой исследуемого распределения отклонений (констант $\overline{X}$ и σ).

Используя графы 4–7 таблицы 1, находим среднее арифметическое $\overline{X}$ выборки по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k=8} x_i m_i = \frac{449{,}46}{25} = 17{,}978 \approx 17{,}98\,\text{мм}.$$

Величину среднего квадратичного отклонения, константу σ (меру рассеяния) определяем, используя данные таблицы, по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i \cdot 10^4}{n \cdot 10^4}} = \sqrt{\frac{304}{25 \cdot 10^4}} = 0{,}035 \approx 0{,}04.$$

По полученным константам ($\overline{X} = 17{,}98$ и σ = 0,04) строим кривую нормального распределения (пунктирная линия на рис. 1).

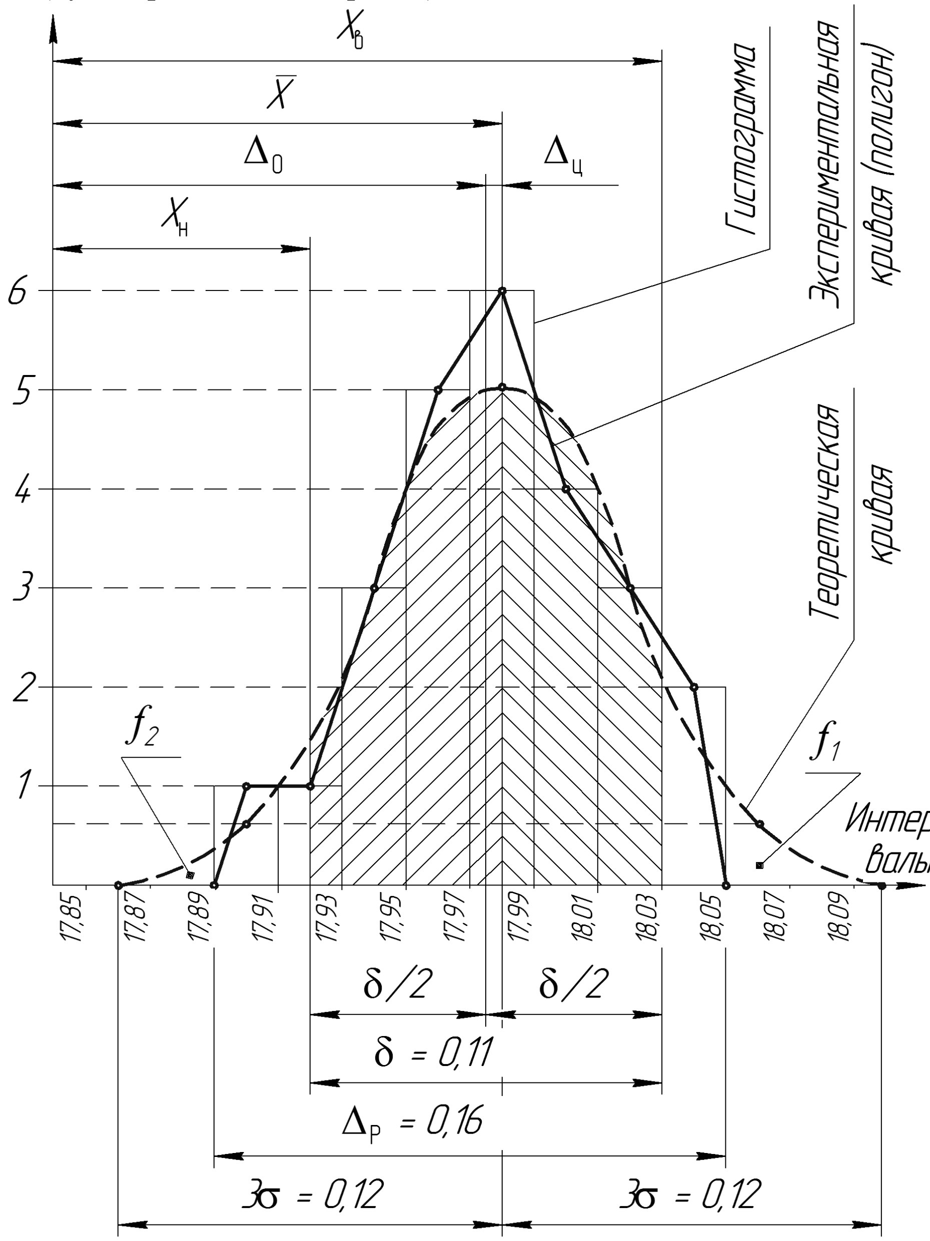

Рис. 1. График экспериментального и нормального распределения (σ=0,04)

Для этого используем известные соотношения

$$m = \frac{nc}{\sigma} \cdot Z_t \tag{1}$$

где n – объем выборки;

C – величина интервалов;

Z_t – нормированная функция.

Для стандартных значений t=0, 1, 2, 3.

При σ = 0,04, c = 0,02 и n = 25 имеем значения m'_t:

1) $m'_0 = 0{,}4 \cdot \frac{n \cdot c}{\sigma} = 5$;

2) $m'_0 = 0{,}24 \cdot \frac{n \cdot c}{\sigma} = 3$;

3) $m'_0 = 0{,}05 \cdot \frac{n \cdot c}{\sigma} = 0{,}6$;

4) $m'_0 = 0$.

Кривую нормального распределения строим по параметрам m'_t и σ (или $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$; t = 0; 1; t = 2; t = 3). На рисунке 1 она изображена пунктирной линией.

Этап 5. Для того чтобы решить вопрос о возможности замены экспериментального графика кривой нормального распределения, можно воспользоваться (как указано выше) одним из существующих методов, например методом Колмогорова.

Однако этот метод не дает ответа на вопрос о том, какова точность подобной замены.

Этап 6. Для проверки, уточнения найденного значения σ используем центральную вертикаль кривой нормального распределения, то есть нулевое сечение кривой, линию среднего арифметического значения $\bar{X}$ выборки отклонений размеров. Параметр (t) – константа модели в этом случае равен нулю, и математическая модель для этого сечения становится уравнением с одной константой σ:

$$m = \frac{nc}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}. \tag{2}$$

Принимаем величину m равной максимальной частоте экспериментального распределения m_{max} и находим соотношение для расчета σ.

$$\sigma = \frac{nc}{m_{max} \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{0{,}4 \cdot n \cdot c}{m_{max}}. \tag{3}$$

Например, для рисунка 1 имеем:

$$\sigma = \frac{0{,}4 \cdot 25 \cdot 0{,}02}{6} = 0{,}033 \approx 0{,}035.$$

Этап 7. Теперь рассчитаем значения m для базовых точек математической модели нормального распределения (для точек t=0, 1, 2, 3).

Для точки t=0 (x=$\bar{X}$) имеем:

$$m_{t=0} = 0{,}4 \cdot \frac{25 \cdot 0{,}02}{0{,}035} = 5{,}7.$$

Соответственно, для других точек

$$m_{t=1} = 3,4,$$

$$m_{t=2} = 0,71,$$

$$m_{t=3} = 0.$$

На рисунке 2 Приведено новое положение кривой нормального распределения.

Этап 8. Для сравнения точности использования двух вариантов математической модели нормального распределения необходимо рассчитать абсолютные и квадратичные ошибки аппроксимации экспериментальных данных используемой зависимостью.

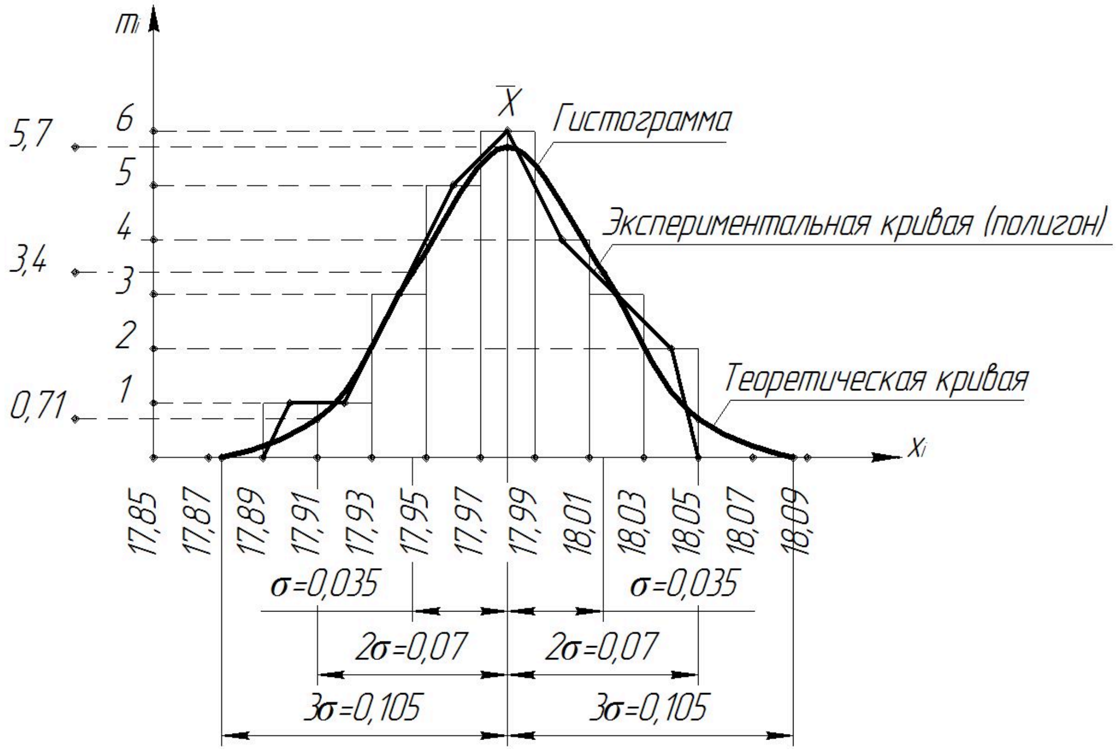

Рис. 2. Уточненный график кривой нормального распределения, σ = 0,035

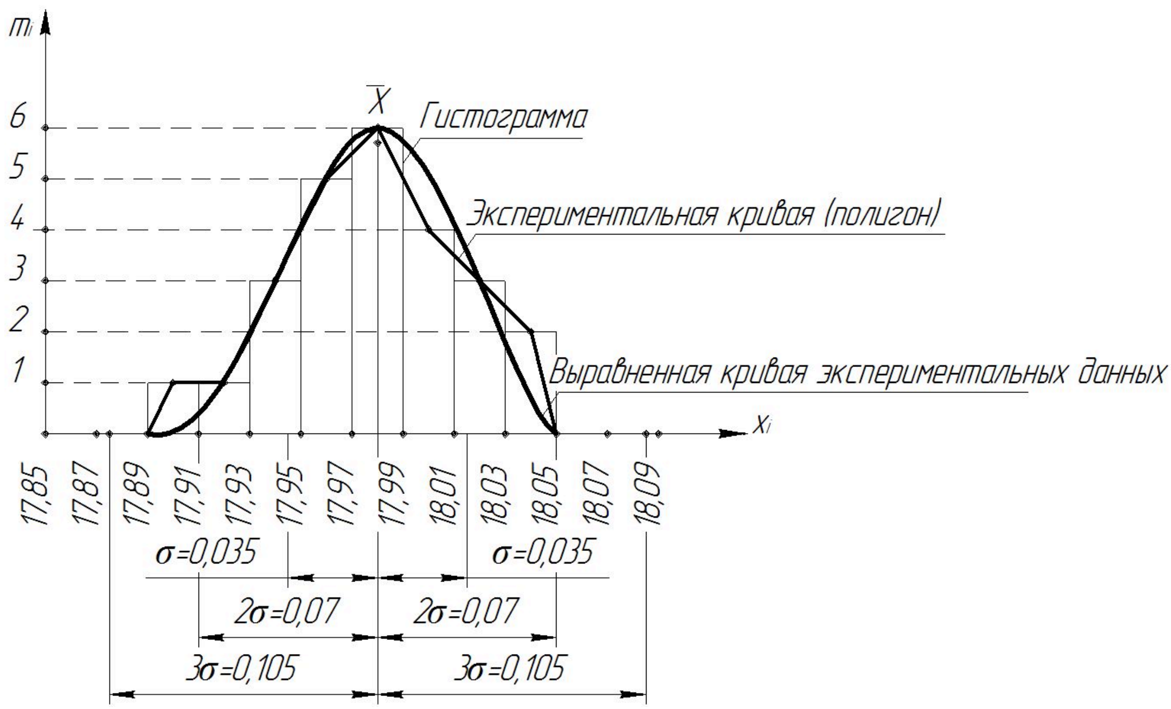

Рис. 3. Построение выровненной кривой экспериментальных данных

Теперь проведем наложение кривых нормального распределения на график выровненной кривой и определим абсолютные отклонения для точек различных значений t (t = 0, 1, 2, 3).

Этап 9. Сравним абсолютные и квадратичные ошибки замены экспериментальной кривой (табл. 2)

Таблица 2

$\sigma = 0,04$, $3\sigma = 0,12$ | $\sigma = 0,35$, $3\sigma = 0,105$

№	t	ξ	ξ^2		№	t	ξ	ξ^2	
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	17,87	3	0	0	1	17,87	3	0	0
2	17,91	2	0,7	0,49	2	17,91	2	0,2	0,04
3	17,94	1	0,4	0,16	3	17,94	1	0,1	0,01
4	17,98	0	1,0	1,0	4	17,98	0	0,3	0,09
5	18,08	1	0,1	0,01	5	18,08	1	0,1	0,01
6	18,06	2	1,0	1,0	6	18,06	2	0,2	0,04
7	18,10	3	0	0	7	18,10	3	0	0
				2,66					0,19

Для этого проведем выравнивание экспериментальной кривой распределения методом плавного проведения кривой от одной точки к другой.

Исправленная (выровненная) кривая представлена на рисунке 3.

Как видно из таблицы 2, точность апрокисмации экспериментальных данных функцией нормального распределения во втором случае значительно выше.

Выводы

1. При определении констант нормального распределения решение об изменении (коррекции) значения σ должно быть подкреплено дополнительными исследованиями.

2. Необоснованное увеличение константы σ может внести большие погрешности в точность оценки экспериментальных данных.

3. В качестве одного из методов уточнения σ может быть использован метод дополнительного распределения этой константы по нулевому сечению.