

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОЦЕССОВ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ ПЕРВЫХ РАЗДЕЛОВ СТЕРЕОМЕТРИИ

© 2010 М. Е. Тимощук

*канд. пед. наук,
доцент каф. алгебры, геометрии
и теории обучения математике
Тел.: (4712)56-80-61*

Курский государственный университет

В статье рассматривается формирование некоторых общих приёмов поиска решения задач и доказательства теорем при изучении первых разделов стереометрии. При этом процессы обучения решению задач и доказательству теорем рассматриваются во взаимосвязи, что способствует формированию гибких умений, обеспечивающих перенос знаний и применение их в новых условиях.

Ключевые слова: поиск доказательства, приёмы поиска, упрощение условий, обобщённые планы, вспомогательная плоскость, перенос знаний.

При изучении курса стереометрии учащиеся встречают ряд трудностей, обусловленных значительно большей сложностью геометрических соотношений в пространстве, чем на плоскости. Возрастают требования к логическому мышлению, пространственному восприятию, самостоятельности мышления школьников. В связи с этим учитель должен продумать всю систему мер по дальнейшему их развитию и предотвращению возможного формального усвоения курса стереометрии.

Для развития умственных способностей учащихся, формирования навыков и гибких умений, обеспечивающих перенос знаний, перспективным является такое обучение, при котором теоремы и задачи рассматриваются во взаимосвязи. При чтении учебника учащиеся часто не понимают, что обоснования многих утверждений по ходу доказательства теоремы опущены. Это естественно и методически оправданно, так как в противном случае одни и те же обоснования, ссылки на аксиомы, многократно повторяясь, загромождали бы учебник, делали изложение мало понятным, закрывали бы смысл доказательства. Важно добиться, чтобы учащиеся понимали необходимость обоснования каждого утверждения, сделанного в ходе доказательства теоремы, могли его воспроизвести по требованию учителя. Практика показывает, что далеко не все учащиеся могут это сделать. Неумение доказывать теоремы непременно сказывается на умении решать задачи. Если в задаче есть вычислительная часть, то значительная часть учащихся начинает решение с вычислений, пропуская доказательную, основную часть решения задачи. В практике работы школы организация процесса обучения доказательству теорем иногда осуществляется иначе, чем процесса решения задач. Теорему учитель доказывает сам, организация поиска плана доказательства осуществляется только в решении задач, и то не всегда. Часто поиск заменяется подсказками, хотя они и оформлены в виде вопросов. В психолого-педагогических исследованиях в последние годы всё больший акцент делается на том, что весь процесс обучения должен строиться как процесс решения познавательных задач. Всякую теорему можно рассматривать как задачу на доказательство, и, следовательно, поиск этого доказательства можно организовать точно так же, как и поиск решения задачи. Взаимосвязь обучения решению задач и доказательству теорем обеспечивается:

а) переносом приёмов и методов, подмечаемых учащимися в ходе изучения теорем, к решению задач и наоборот; б) единством методических подходов в процессе обучения решению задач и доказательству теорем. При этом следует акцентировать внимание учащихся на обучении не только логическим компонентам поиска, но так же и эвристическим. С этой целью необходимо обращать внимание на те знания, которые могут быть использованы в процессе поиска доказательства последующих теорем и решении задач. К этим знаниям относятся знания не только конкретных теорем, аксиом, определений, но и тех методов, которые использовались в ходе доказательства.

При изучении первых разделов стереометрии в ходе доказательства теорем, решении задач часто используется приём проведения вспомогательной плоскости и рассмотрения линий пересечения этой плоскости с данными (и вспомогательными) плоскостями. Этот приём часто применяется в сочетании с методом от противного. Покажем, как описанный приём может быть подмечен учащимися в результате анализа уже найденного решения задачи, в которой он использовался и применён затем в новой ситуации при решении других задач, доказательстве теорем.

Задача 1. Доказать, что если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую.

Формулируется предположение: пусть данная плоскость α пересекает прямую a , но не пересекает прямую b (напомним, что по условию $a \parallel b$). Далее нужно провести такие рассуждения, которые приведут к противоречию с известной теоремой или аксиомой.

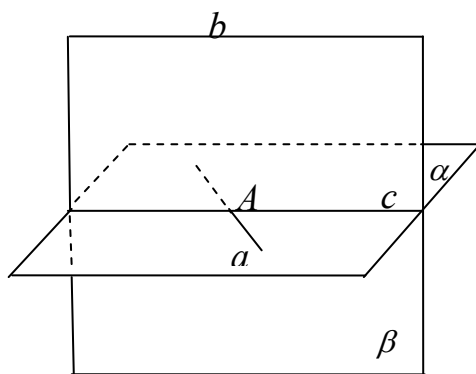


Рис. 1

В результате анализа проблемной ситуации формулируется гипотеза: возможно проведение таких рассуждений, которые приведут к противоречию с теоремой: «Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой и притом только одну». Для этого нужно установить, исходя из предположения, что существует такая прямая c , которая параллельна b и проходит через точку A , взятую на прямой a (при этом c не совпадает с прямой a) (рис. 1).

Так как искомая прямая должна быть параллельна прямой b , то эти прямые лежат в одной плоскости. Встаёт вопрос о проведении вспомогательной плоскости, в которой лежат указанные прямые. В ходе дальнейших рассуждений выясняется, что искомой прямой может быть линия пересечения c данной плоскости α и вспомогательной плоскости β , проходящей через прямую b и точку A , взятую на прямой a .

Доказательство того, что $c \parallel b$, можно провести методом от противного: прямые c и b лежат в одной плоскости, поэтому они могут быть или пересекающимися или параллельными. Если бы прямая b пересекала прямую c , то она пересекала бы и плоскость α , что противоречит сделанному предположению. Остаётся, что $c \parallel b$. Получено противоречие с указанной выше теоремой. В ходе анализа проведённого решения внимание учащихся акцентируется на том моменте поиска, где был поставлен вопрос о проведении вспомогательной плоскости β , пересекающей данную плоскость α , и рассмотрении их линии пересечения.

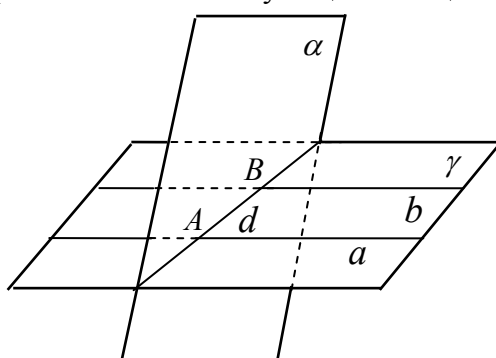


Рис. 2

Задача 1 может быть решена другим способом без применения метода от противного. Но и в этом случае рассматривается

вспомогательная плоскость γ , определяемая параллельными прямыми a и b , и линия пересечения d плоскостей γ и α (рис. 2). Доказывается, что прямая d пересекает прямую b и точка B пересечения этих прямых является также точкой пересечения прямой b и плоскости α .

В ходе ретроспективного анализа приведённого решения внимание учащихся обращается на приём проведения вспомогательной плоскости, пересекающей данную плоскость, и использование линии пересечения этих плоскостей в ходе дальнейшего решения.

Учитель указывает, что подмеченный приём часто используется в решении задач курса стереометрии.

В дальнейшем учащиеся могут самостоятельно применить этот приём в ходе поиска доказательства ряда теорем, решения задач, например следующих:

- 1) через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной и притом только одну;
- 2) если прямая пересекает одну из двух данных параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую;
- 3) если прямая параллельна одной из двух параллельных плоскостей, то она параллельна и второй;
- 4) если две плоскости перпендикулярны данной прямой, то они параллельны;
- 5) если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

Одной из первых теорем, рассматриваемых в курсе стереометрии, является следующая: «через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну».

Метод доказательства теоремы может быть использован учащимися в дальнейшем в ходе решения задач на доказательство существования прямых и плоскостей, удовлетворяющих заданным условиям.

Анализируя доказательство приведенной теоремы и решения нескольких задач указанного выше класса, учащиеся выясняют, что в курсе стереометрии означают слова «можно провести», формулируют этапы решения задач этого класса. Они могут также обобщить план поиска (проведение анализа) решения задач на доказательство существования прямых и плоскостей, удовлетворяющих заданным условиям. Этот план можно представить в виде следующей системы указаний:

- 1) установить, какой теоремой или аксиомой можно воспользоваться для доказательства существования прямой или плоскости, удовлетворяющей заданным условиям;
- 2) определить, какие и в какой последовательности вспомогательные прямые или плоскости достаточно провести и каким условиям они должны удовлетворять;
- 3) повторять рассуждения 1) и 2) до тех пор, пока не будут получены элементарные задачи – существование указанной в пункте 2) фигуры уже доказано ранее или доказывается рассуждениями в один-два шага.

В дальнейшем поиск решения задач рассматриваемого класса можно осуществлять в соответствии с разработанным планом. Приведём пример.

Задача 2. Прямая a параллельна плоскости α . Провести через прямую a плоскость β , параллельную данной плоскости α .

С целью поиска решения задачи учащиеся могут провести следующие рассуждения:

- 1) исходной теоремой для доказательства существования плоскости β , параллельной плоскости α , является признак параллельности двух плоскостей.

Плоскость β следует провести через две пересекающиеся прямые (одна из которых a), соответственно параллельные двум прямым, лежащим в плоскости α ;

2) на плоскости α надо провести две пересекающиеся прямые. Одна из этих прямых должна быть параллельна прямой a , вторая может быть проведена произвольно через точку, взятую на первой прямой;

3) для получения прямой, параллельной прямой a и лежащей в плоскости α , достаточно провести плоскость γ через прямую a и точку B , взятую на плоскости α . Плоскость γ пересечёт плоскость α по прямой c , проходящей через точку B (рис. 3). Следует доказать, что прямая c параллельна прямой a .

Дальнейшее решение задачи очевидно: через точку B на плоскости α провести прямую d , пересекающую прямую c ; затем через точку B_1 , взятую на прямой a , провести прямую b , параллельную прямой d . Поиск решения исходной задачи завершён.

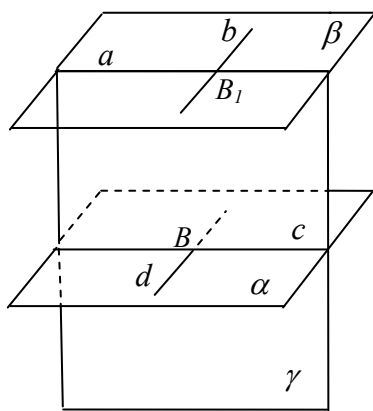


Рис. 3

После решения нескольких задач учащиеся могут обобщить план решения задач на доказательство, связанных со взаимным расположением прямых и плоскостей, и решаемых с использованием приема проведения вспомогательных плоскостей в сочетании с методом от противного:

1) предположить противное тому, что требуется доказать;

2) провести вспомогательную плоскость (через прямую и точку вне её, две пересекающиеся или две параллельные прямые) так, чтобы она пересекала данные плоскости.

Замечание: Возможно проведение нескольких вспомогательных плоскостей;

3) доказать, что вспомогательная плоскость пересекает данные, рассмотреть их линии пересечения;

4) составить цепочку простых задач так, чтобы в их условия вошли линии пересечения данных и вспомогательных плоскостей и последовательное решение их могло привести к противоречию с условием или известной теоремой или аксиомой;

5) решить последовательно каждую из простых задач;

6) сделать вывод о неверности предположения и верности утверждения, сформулированного в требовании задачи.

Примером задачи, решаемой в соответствии с приведенным планом, является задача 1, рассмотренная выше.

Обобщенные планы поиска решения задачи аналогичным образом могут быть составлены и к другим классам задач в процессе изучения первых разделов стереометрии. Их особенностью является то, что они не являются чем-то застывшим, а наоборот, отражая наиболее существенное в решении задач, общие подходы к решению класса задач, каждый раз могут перестраиваться и упорядочиваться в решении каждой конкретной задачи. В терминологии ряда психологов такие планы можно назвать эвристическими программами решения классов задач. Отличие такой программы от логической схемы решения состоит в том, что она только направляет поиск решения, определяя достаточно широкую область поиска. Вместе с тем, эвристическая программа способствует сближению субъективной структуры решения с объективно-логической.

В ходе решения задач, доказательства теорем используется следующий прием: рассматривается прямая, удовлетворяющая части требований задачи. Затем доказывается, что она совпадает с прямой, полностью удовлетворяющей требованию задачи.

Этот прием учащиеся могут подметить при изучении курса планиметрии. Например, для доказательства того, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям, через середину одной из боковых сторон трапеции проводится прямая, параллельная основаниям (т.е. удовлетворяющая части требований задачи). Затем доказывается, что эта прямая проходит через середины диагоналей трапеции (достаточно применить теорему Фалеса), то есть удовлетворяет всем требованиям задачи.

Тот же прием используется часто и в стереометрии. Приведем примеры.

Задача 3. Доказать, что прямая, параллельная каждой из пересекающихся плоскостей, параллельна их линии пересечения.

Один из способов решения задачи 3 основан на использовании сочетания только что описанного приёма и приёма проведения вспомогательной плоскости.

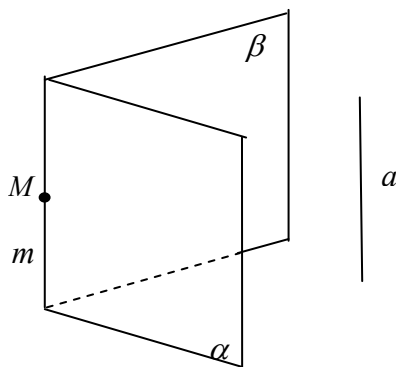


Рис. 4

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой m (рис. 4). Прямая a параллельна каждой из плоскостей α и β . Проведем вспомогательную плоскость γ через прямую a и точку M , взятую на прямой m . Плоскость γ пересекает каждую из данных плоскостей α и β по прямым t_1 и t_2 соответственно. Нетрудно доказать, что каждая из прямых t_1 и t_2 параллельна прямой a , в то же время обе прямые проходят через точку M , следовательно, совпадают. Таким образом, имеется прямая, параллельная прямой a , то есть

удовлетворяющая части требований задачи. Осталось доказать, что указанная прямая совпадает с прямой m , удовлетворяющей оставшимся требованиям (является линией пересечения данных плоскостей). Последняя задача является элементарной, её решение очевидно. Тем самым доказано, что прямая a параллельна прямой m .

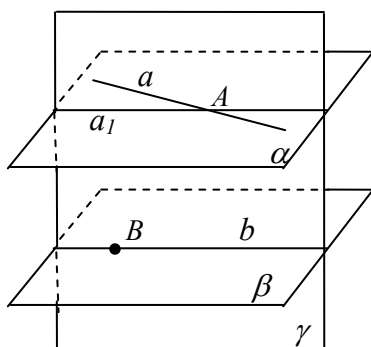


Рис. 5

Задача 4. Плоскости α и β параллельны. Через точку A , взятую на плоскости α , проведена прямая a , параллельная плоскости β (рис. 5). Доказать, что прямая a лежит в плоскости α .

Решение. Проведем плоскость γ через прямую a и точку B , взятую на плоскости β . Она пересечёт плоскости α и β по параллельным прямым a_1 и b соответственно. Рассмотрим прямую a_1 . Она проходит через точку A и лежит в плоскости α , то есть удовлетворяет части требований задачи. Далее исходная задача сводится к доказательству того, что прямая a_1 параллельна плоскости β (удовлетворяет оставшимся требованиям) и что прямые a и a_1 совпадают. Обе задачи являются элементарными.

Рассматриваемым приёмом можно пользоваться в ходе поиска решения следующих задач:

1) доказать, что если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой;

2) все параллельные прямые, пересекающие данную прямую лежат в одной плоскости;

3) если две плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости. Доказать.

В дальнейшем учащиеся могут использовать подмеченный приём в ходе выполнения ряда чертежей. Например, чтобы показать угол между высотой SO правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и её боковой гранью SDC (рис. 6), нужно провести перпендикуляр через точку O к плоскости грани SDC . Учащиеся проводят в треугольнике SOK отрезок OE , перпендикулярный стороне SK . Теперь имеем прямую OE , перпендикулярную только одной прямой, лежащей в плоскости SDC (прямая OE удовлетворяет части требований). Далее следует доказать, что прямая OE , будучи перпендикулярной ещё одной прямой, лежащей в плоскости SDC (а именно, прямой DC), перпендикулярна плоскости SDC , то есть совпадает с прямой, проведённой через точку O перпендикулярно плоскости грани SDC .

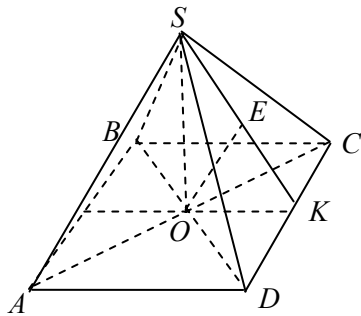


Рис. 6

С целью поиска решения задач в геометрии часто используется приём упрощения условия, в частности временное отбрасывание части требований задач. Приведём примеры.

Задача 5. Доказать, что через данную точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α .

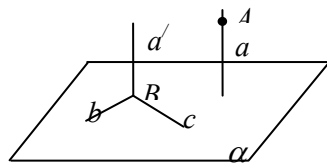


Рис. 7

Отбросим временно требование, что искомая прямая должна проходить через точку A .

Проведём в плоскости α две прямые b и c , пересекающиеся в точке B (рис. 7). Решение исходной задачи сводится к проведению через точку B прямой a' , перпендикулярной каждой из прямых b и c . Затем через точку A проводится прямая a , параллельная прямой a' .

Задача 6. Плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 8). В плоскости α через данную на ней точку A , не принадлежащую прямой b , провести прямую, образующую с плоскостью β угол, по величине равный данному углу.

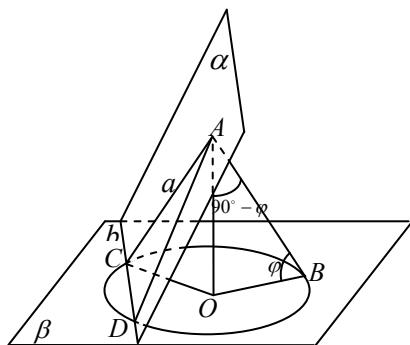


Рис. 8

Решение. Отбросим временно то требование, что искомая прямая a должна содержаться в плоскости α . В результате из исходной задачи выделяется более простая задача: через данную точку A , не принадлежащую плоскости β , провести прямую, образующую с этой плоскостью угол, равный по величине данному углу φ .

Для её решения проведем через точку A прямую AO , перпендикулярную плоскости β , затем прямую AB под углом $90^\circ - \varphi$ к прямой AO (O и B – точки пересечения прямых AO и AB соответственно с плоскостью β). Нетрудно доказать, что прямая AB образует с плоскостью β угол φ .

Затем учащиеся выясняют, что через точку A можно провести бесконечное множество прямых, образующих угол φ с плоскостью β . Геометрическое место точек пересечения этих прямых с плоскостью β есть окружность с центром в точке O и радиусом OB . Для решения исходной задачи теперь достаточно доказать, что прямая, проведённая, через точку A и точку пересечения прямой b с указанной окружностью, является искомой (на рис. 8 прямые AC и DC являются искомыми).

Таким образом, исходная задача оказывается сведенной к элементарным подзадачам.

Задача 7. Существует ли прямая, пересекающая каждую из двух данных скрещивающихся прямых a и b и проходящая через данную точку A (рис.9).

Решение. Воспользуемся приемом упрощения задачи. Условие задачи разделим на две части.

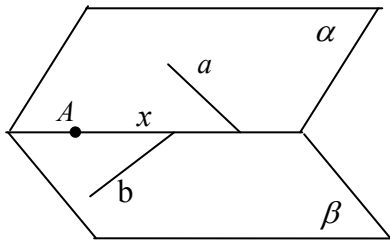


Рис. 9

1. Искомая прямая x должна быть проведена так, чтобы она пересекала данную прямую a и проходила через точку A (временно отбросили условие, что искомая прямая пересекает и прямую b). Тогда прямые x и a должны содержаться в одной плоскости α , проходящей через прямую a и точку A .

2. Аналогично, прямая x должна пересекать прямую b и проходить через точку A , следовательно, она должна содержаться в плоскости β , проходящей через прямую b и точку A .

Итак, искомая прямая может быть найдена как линия пересечения двух указанных плоскостей α и β . При этом следует указать условие, при котором задача имеет решение.

Из курса планиметрии учащимся известен такой прием: найти путь решения задачи, выполняя поочередно шаги от ее требования к условию навстречу друг другу.

Задача 8. Из точки M проведены секущая, пересекающая окружность в точках A и B , и касательная с точкой касания C . Докажите, что квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, то есть $MC^2 = MA \cdot MB$.

Решение. Исходя из требований задачи, учащиеся переформулируют задание:

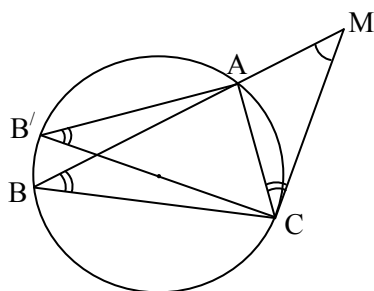


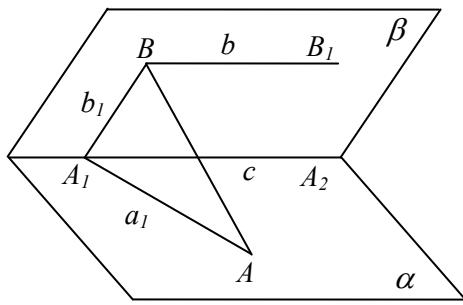
Рис. 10

доказать равенство $MC \cdot MC = MA \cdot MB$ или $MC : MA = MB : MC$. Последнее равенство приводит к постановке задачи: доказать подобие треугольников MCB и MAC . Из условия задачи вытекает, что названные треугольники имеют общий угол M . Остаётся доказать, что треугольники имеют ещё одну пару равных углов. Ставится очередная подзадача: доказать, что $\angle MCA = \angle MBC$ (рис. 10). Для её решения учащиеся используют свойства касательной к окружности и вписанного в окружность угла, то есть извлекая нужную им информацию из условия

задачи.

Этот приём учащиеся могут использовать для поиска решения ряда задач в курсе стереометрии.

Задача 9. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A , расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b , параллельная прямой c и отстоящая на 1,2 м от неё. Найти расстояние от точки A до прямой b .



Решение. В плоскости α проведём через точку А прямую a , перпендикулярную прямой c и пересекающую её в точке A_1 . В плоскости β через точку A_1 проведём прямую b_1 , перпендикулярную прямой b и пересекающую её в точке В. По условию задачи длина отрезка AA_1 равна 1,5м, длина отрезка A_1B – 1,2м (рис. 11). Начнём поиск решения от требования задачи. Чтобы найти расстояние от точки А до прямой b , надо выполнить построение так, чтобы отрезок, длину которого следует найти, являлся

бы стороной треугольника. В этом треугольнике должны быть известны три элемента, хотя бы один из которых был линейным. Так как известны длины двух отрезков AA_1 и A_1B , выдвигается гипотеза: искомым отрезком является отрезок AB . Последнее предположение надо доказать. Итак, ставится задача: доказать, что отрезок AB перпендикулярен прямой BB_1 . Возвращаемся теперь к условию задачи. Исходя из условия, учащиеся могут доказать, что прямая AA_1 перпендикулярна плоскости β (так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым A_1B и A_1A_2 этой плоскости), а, следовательно, в треугольнике AA_1B угол A_1 – прямой. Далее, используя теорему о трёх перпендикулярах, учащиеся доказывают, что отрезок AB перпендикулярен прямой BB_1 . Таким образом, поиск решения задачи завершён.

В первых разделах стереометрии полезно рассмотреть такие задачи, в решении которых используется одна из форм косвенного доказательства – доказательство методом исключения. В решении задач учащиеся часто допускают ошибки, связанные с рассмотрением резных случаев взаимного расположения данных точек, прямых и плоскостей. Они ограничиваются рассмотрением одного, чаще самого простого частного случая.

Чтобы учащиеся не допускали подобных ошибок, следует решать задачи, в которых приходится рассматривать различные случаи взаимного расположения данных точек, прямых и плоскостей, обращать внимание на существенные моменты в их расположении. (В одних случаях бывает неважно, параллельны, например, данные прямые или пересекаются, а важно то, что они лежат в одной плоскости. В других, наоборот, число решений будет разным в зависимости от того, параллельны прямые, пересекаются или скрещиваются и т.д.)

В задачах на доказательство методом исключений как раз и приходится рассматривать различные случаи взаимного положения данных фигур. Примером такой задачи в теме «Параллельность в пространстве» может быть следующая.

Задача 10. Если любая плоскость, пересекающая прямую a пересекает и прямую b , то эти прямые параллельны. Доказать.

При решении задачи с использованием метода от противного делается предположение: пусть прямые a и b не параллельны. Какие же случаи взаимного расположения тогда возможны? Учащиеся находят две возможности: либо прямые a и b пересекаются, либо скрещиваются. Затем по очереди отвергаются обе эти возможности, тогда остается только третья возможность их взаимного расположения, а именно, что прямые параллельны. Имея определенный опыт в решении таких задач, учащиеся переносят сформировавшиеся умения в новые условия: с большей долей самостоятельности применяют известный теперь метод в аналогичных ситуациях в теме «Перпендикулярность в пространстве». Например, это возможно при решении задач следующего типа: «Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым c и b , лежащим в данной плоскости α , то прямая a пересекает плоскость α ».

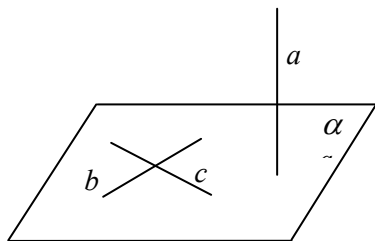


Рис. 12

Иногда это утверждение вносится в условие теоремы признака перпендикулярности прямой и плоскости. Ряд авторов возражают против этого введения, так как условие теоремы в этом случае содержит лишние данные. Часто это утверждение считается очевидным и доказательство его опускается. С целью воспитания у учащихся стремления к строгости доказательства целесообразно предложить доказать это утверждение, особенно тем учащимся, которые имеют

достаточно высокий уровень подготовки. Решение задачи затруднений не вызывает, учащиеся используют известные им методы и приёмы решения задач этого типа: сделав предположение, что данная прямая a не пересекает данную плоскость α , рассматриваются две возможности взаимного расположения прямой a и плоскости α : 1) прямая a лежит в плоскости α ; 2) прямая a параллельна плоскости α . В случае 1) сразу приходим к противоречию с известной теоремой планиметрии о единственности перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой. В случае 2) используется известный прием проведения вспомогательной плоскости через прямую a и точку A плоскости α . Рассматривается линия пересечения a_1 вспомогательной плоскости и плоскости α . Доказывается параллельность прямых a и a_1 , и снова получается противоречие с той же теоремой. Полезно решать эту задачу другим способом. Для этого можно воспользоваться приемом установления области поиска путем замены некоторого понятия его определением. Прямая пересекает плоскость, если она не лежит в этой плоскости и имеет с ней общую точку. Это наталкивает на выделение подзадачи, к которой сводится исходная: взять точку A на плоскости α (рис. 12), рассмотреть возможные случаи расположения прямой a и точки A , во всех случаях показать, что прямая a имеет с плоскостью α только одну общую точку. Возможны два случая: точка A принадлежит прямой a и точка A не принадлежит прямой a . В первом случае задача сводится к доказательству того, что прямая a не имеет других общих точек с плоскостью α , решается с применением метода от противного.

Во втором случае выделяются очередные подзадачи: доказать, что существует прямая, параллельная прямой a и проходящая через точку A (простая задача, решаемая в один шаг), что эта прямая не имеет с плоскостью α других общих точек (как в первом случае), и если одна из параллельных прямых пересекает плоскость α , то и вторая прямая пересекает эту плоскость.

Выявление и закрепление в памяти учащихся тех приёмов, которые были использованы в данном решении, определение условий возможности их применения и применение каждый раз в новых условиях – всё это способствует превращению задач в развивающее средство, формированию гибких умений по решению задач и доказательству теорем.